沖本本で時系列解析勉強会

第１章と第２章前半

Kano Lab.

Yuchi MATSUOKA

December 22, 2016

1.1.1 時系列分析の目的

- 時系列データ：時間の推移とともに観測されるデータ（順序に意味あり）
- クロスセクションデータ：ある 1 時点において複数観測されるデータ

- 時系列分析の目的
  - 時系列データに関して何らかの予測を行う.
  - 変数間の動学的関係を明らかにする.
  - 経済理論やファイナンス理論の検証.

1.1.2 時系列データの種類

- よくあるやつ
  - 原系列：元のデータ
  - 対数系列：原系列を対数変換したもの
  - 差分系列（階差系列）：原系列で 1 時点離れたデータとの差をとったもの
  - 対数差分列：対数系列で 1 時点離れたデータとの差をとったもの
- 季節調整をすることも.（本書では扱わない）
  - 季節調整済み系列：原系列から季節変動を取り除いた系列

1.1.3 基本統計量と時系列モデル

- y_t の期待値 $\mu_t = E(y_t)$, 分散 $Var(y_t) = E(y_t - \mu_t)^2$.
- さらに，標準偏差（ボラティリティ）$\sqrt{Var(y_t)}$ も重要.（特にファイナンスでのリスク評価）.
- 自己共分散

$$\gamma_{kt} = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu_t)(y_{t-k} - \mu_{t-k}].$$

  - 正なら，期待値を基準として同じ方向に動く傾向があり，負なら反対方向に動く傾向がある.
  - k の関数としてみると自己共分散関数という.

モデル選択において重要な自己相関係数

- 自己相関係数：

$$\rho_{kt} = Corr(y_t, y_{t-k}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t) \cdot Var(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_{kt}}{\sqrt{\gamma_{0t}\gamma_{0,t-k}}}$$

  - 自己共分散は単位に依存．変数間の関係の強さは計れない．そこで基準化した自己相関係数を考える．
  - 明らかに $\rho_{0t} = 1$.
  - k の関数としてみると自己相関関数という．
  - 自己相関関数をグラフに書いたものをコレログラムという．

確率過程への招待

- 期待値や自己相関は t に依存するが，時点 t の時系列データは一つだけ...

$\rightarrow$ うまく推定できない.

$\rightarrow$ 時系列データ $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ をある確率変数列 $\{y_t\}_{t=-\infty}^{t=\infty}$ からの 1 つの実現値とみなし，その生成過程に何らかの性質や構造を過程する.（確率過程）

定常性とは

- 様々な時系列モデルの根幹にある概念.
  - 定常性の仮定の下，基礎的な時系列モデルが構築され，それらを基に非定常なモデルが構築される.

Definition (弱定常性)

任意の t と k に対して

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \mu \\ \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) &= E[(y_t-\mu)(y_{t-k}-\mu)] = \gamma_k. \end{aligned}$$

が成立するとき，過程は弱定常といわれる.

つまり，過程の期待値と自己共分散が時間に依らず一定！

より強い定常性

Definition (強定常性)

任意の t と k 対して，$(y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+k})^T$ の同時分布が同一となる場合，過程は強定常といわれる.

同時分布が不変であることを意味している．当然，弱定常性より強い．が正規過程，i.e,

任意の t,k で上の同時分布が多変量正規分布となるような過程であれば，弱定常性と強定常正は同値となる.

普通は弱定常性で十分！(通常経済，ファイナンスでは期待値や自己相関に興味があるがそれを議論するのに強定常性は必要ない)．また強定常性の仮定は検証するのが困難.

撹乱項として有用な時系列モデル達

Definition (iid 系列)

各時点のデータが i.i.d. である系列は iid 系列と呼ばれる.

iid 系列自体は最も基本的な強定常過程だが，経済，ファイナンスデータの時系列モデルとして使われることは少ない.

しかし期待値 0 の iid 系列は時系列モデルの撹乱項として用いられる．もう少し，独立性や同一分布性を緩めた弱定常なホワイトノイズの方がよく使われる.

Definition (ホワイトノイズ)

すべての時点 t において，

$$E(\epsilon_t) = 0, \quad \gamma_k = E(\epsilon_t \epsilon_{t-k}) = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

が成立するとき，ϵ_t はホワイトノイズと呼ばれる.

自己相関の検定の重要性

- データが自己相関をもっているのであれば，その自己相関構造を記述できる時系列モデルを構築し，そのモデルを予測などに用いることができる．
- 自己相関の検定法：
  1. 定常性の仮定の下，期待値，自己共分散，自己相関を以下で推定．

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t,\ \hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}),\ k = 0, 1, 2, \ldots \\
\hat{\rho}_k &= \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0},\ k = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

  2. 帰無仮説 $H_0 : \rho_k = 0$ vs 対立仮説 $H_1 \neq 0$ で検定．
  3. ρ_k の帰無仮説下での漸近分布は $N(0, 1/T)$ なので，これで棄却域を計算できる．

一気に検定する（かばん検定）

- 帰無仮説 $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0$ vs 対立仮説 H_1 : 少なくとも 1 つの $k \in [1, m]$ で $\rho_k \neq 0$.
- 統計量として，

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}$$

を考える．これは帰無仮説の下で，漸近的に $\chi^2(m)$ に従う．

- １変量の時系列データに対する基本的なモデルである自己回帰移動平均（ARMA）過程についての章.
- テキストの後半の複雑なモデルは ARMA モデルが基になっていることが多い（つまり非常に重要！）.

1 時系列分析の基礎概念

1.1 時系列分析の基礎

1.2 定常性

1.3 ホワイトノイズ

1.4 自己相関の検定

2 ARMA 過程

2.1 ARMA 過程の性質

自己相関のモデル化

- ２つの考え方：
  - y_t と y_{t-1} が共通の成分を含む．たとえば

$$\begin{cases} y_t = a + b \\ y_{t-1} = b + c \end{cases}$$

  - y_t のモデルに y_{t-1} が含まれる．たとえば

$$y_t = a y_{t-1} + b$$

- 前者が移動平均 (MA) 過程，後者が自己回帰 (AR) 過程の考え方！

2.1.1 MA 過程

- 1 次 MA 過程（MA(1) 過程）は

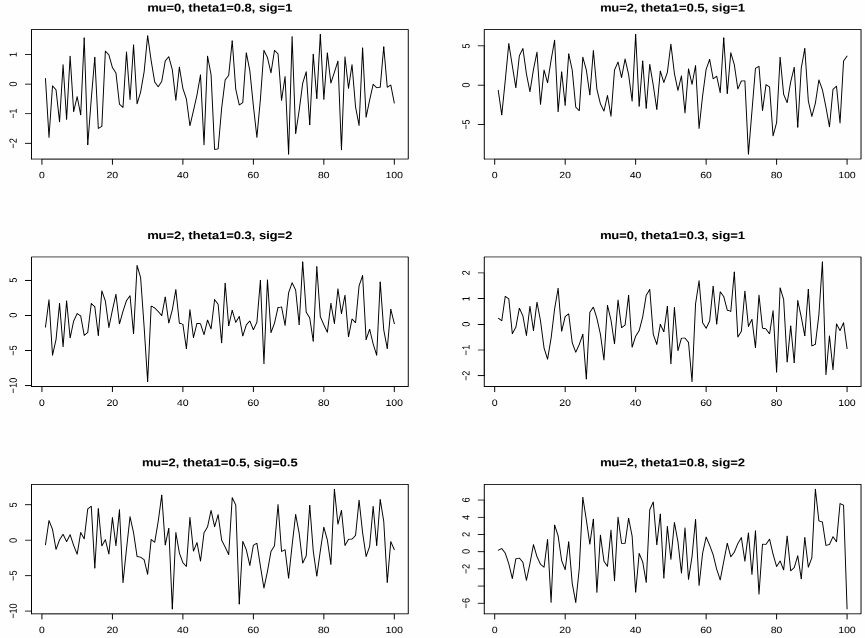
$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$$

で定義される. ($y_t \sim \text{MA}(1)$ と書く.)

  - このとき,

$$y_{t-1} = \mu + \epsilon_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

であり，共通項 ϵ_{t-1} により 1 次の自己相関が生じる．θ_1 は自己相関の強さに影響.


mu=0, theta1=0.8, sig=1
mu=2, theta1=0.5, sig=1
mu=2, theta1=0.3, sig=2
mu=0, theta1=0.3, sig=1
mu=2, theta1=0.5, sig=0.5
mu=2, theta1=0.8, sig=2

MA(1) 過程の期待値と分散

- まず，シミュレーションから期待値は μ と想像される．実際，

$$E(y_t) \quad = \quad E(\mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}) = \mu + 0 + \theta_1 \cdot 0 = \mu.$$

- シミュレーションをみると分散は撹乱項 ϵ の分散よりも大きそう．実際，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= Var(y_t) = Var(\mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}) = Var(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}) \\
&= Var(\epsilon_t) + \theta_1^2 Var(\epsilon_{t-1}) + 2\theta_1 Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) \\
&= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + 0 \\
&= (1 + \theta_1^2)\sigma^2.
\end{aligned}$$

$\theta_1^2 \sigma^2$ だけ撹乱項 ϵ の分散より大きくなる．

MA(1) 過程の自己相関の値

1 次自己共分散は次のように容易に計算される.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(\mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1}, \mu + \epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-2}) \\
&= Cov(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-2}) \\
&= Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) + Cov(\epsilon_t, \theta_1\epsilon_{t-2}) + Cov(\theta_1\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) + Cov(\theta_1\epsilon_{t-1}, \theta_1\epsilon_{t-2}) \\
&\quad \text{(ホワイトノイズの自己共分散は 0)} \\
&= \theta_1 Cov(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) = \theta_1\sigma^2.
\end{aligned}$$

よって 1 次自己相関は $\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$ となる.（2 次以降の自己相関は自明に 0 である）.

$\rightarrow$ 期待値も自己相関も t に依存しないので，MA(1) は常に弱定常！

MA(q) 過程への一般化

- q 次移動平均過程は

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}, \quad \epsilon_t \sim \text{W.N}(\sigma^2).$$

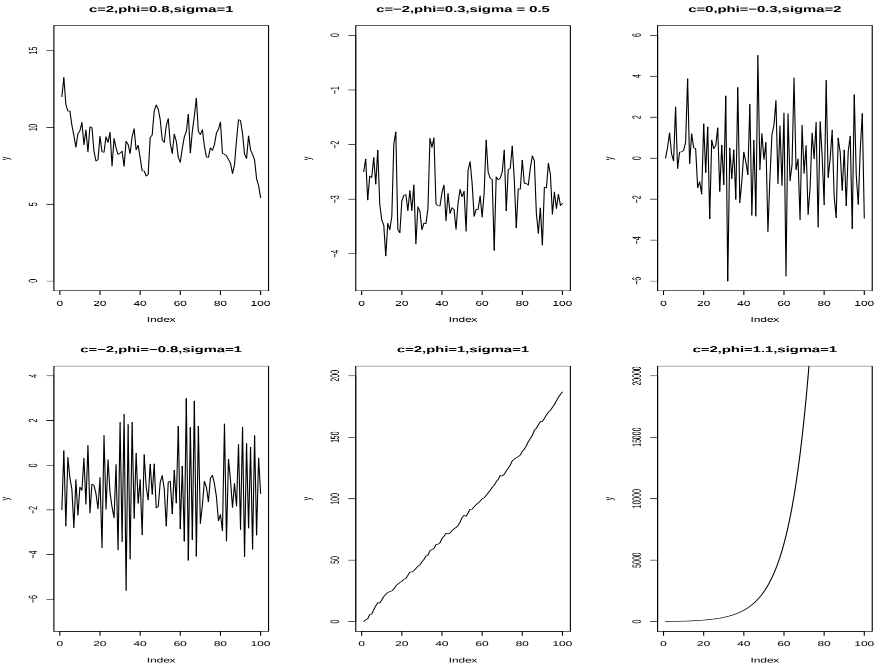
- 次のような性質が成り立つ：
  1. $E(y_t) = \mu.$
  2. $\gamma_0 = Var(y_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2.$
  3. $$\gamma_k = \begin{cases} (\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma^2, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k \geq q+1 \end{cases}$$
  4. MA 過程は常に定常.
  5. $$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k \geq q+1 \end{cases}$$

AR 過程

- MA(q) 過程で，長期にわたる自己相関をモデル化するには，多くのパラメータが必要になり，また，ホワイトノイズの線形和が現れるため解釈が難しくなるし，モデルの推定や予測が複雑になる．
- AR モデルなら回避できるかも！
- 1 次 AR 過程（AR(1) 過程）は

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathrm{W.N}(\sigma^2)$$

- 初期値をどうするかという問題が生まれるが，過程が定常である場合，初期値の影響は時間とともに消滅するので，そんなに気にしなくてよい．


c=2,phi=0.8,sigma=1
c=−2,phi=0.3,sigma = 0.5
c=0,phi=−0.3,sigma=2
c=−2,phi=−0.8,sigma=1
c=2,phi=1,sigma=1
c=2,phi=1.1,sigma=1
y
Index
0 20 40 60 80 100
0 5 10 15
0 −1 −2 −3 −4
6 4 2 0 −2 −4 −6
4 2 0 −2 −4 −6
0 50 100 150 200
0 5000 10000 15000 20000

シミュレーションからの考察

- MA 過程はパラメータによらず定常だったが AR 過程の定常性は，パラメータの値に依存する．

→ AR(1) では $|\phi_1| < 1$ が条件．以下ではこれを仮定する．

- MA 過程と異なり，AR 過程の期待値は定数項 c とは一致しない．実際，

$$\begin{aligned} \mu = E(y_t) &= E(c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t) = c + \phi_1 E(y_{t-1}) = c + \phi_1 \mu \\ \therefore \mu &= \frac{c}{1-\phi_1} \end{aligned}$$

- MA 過程と同様，過程の分散は撹乱項の分散 σ^2 より大きそう．実際，

$$\begin{aligned} & \gamma_0 = Var(y_t) = Var(c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t) = Var(\phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t) \\ = \quad & \phi_1^2 Var(y_{t-1}) + Var(\epsilon_t) + 2Cov(y_{t-1}, \epsilon_t) = \phi_1^2 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 \\ \therefore \quad & \gamma_0 = \sigma^2/(1-\phi_1^2). \end{aligned}$$

AR(1) 過程の自己共分散

- k 次自己共分散を考えると，

$$\begin{aligned}\gamma_k &= Cov(y_t, y_{t-k}) = Cov(\phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t, y_{t-k}) \\ &= Cov(\phi_1 y_{t-1}, y_{t-k}) + Cov(\epsilon_t, y_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1}\end{aligned}$$

- 両辺を γ_0 で割ると，

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$$

が得られる，(ユール・ウォーカー方程式)

- AR 過程の自己相関はユール・ウォーカー方程式と $\rho_0 = 1$ から逐次的に求められる！(AR(1) なら $\rho_k = \phi_1^k$)

AR(p) 過程への一般化

- p 次 AR 過程（AR(p) 過程）は

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{W.N.}(\sigma^2).$$

- まず，AR(p) 過程が定常であるとしてその性質を列挙する．
  1. $\mu = E(y_t) = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots\phi_p}$.
  2. $\gamma_0 = Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\cdots\phi_p\rho_p}$.
  3. 自己共分散と自己相関は y_t が従う AR 過程と同一の係数を持つ以下の p 次差分方程式に従う．

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq 1 \\ \rho_k &= \phi_1\rho_{k-1} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

     後者はユール・ウォーカー方程式．
  4. AR 過程の自己相関は指数的に減衰する．

2.1.3 ARMA 過程

- 自己回帰移動平均 (ARMA) 過程は AR と MA を両方含んだ過程.
- ARMA(p,q) 過程は

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots \theta_p \epsilon_{t-p}, \quad \epsilon_t \sim \text{W.N}(\sigma^2).$$

  - AR と MA の性質のうち強い方が ARMA 過程の性質となる.
    Ex. MA は常に定常だが，AR は定常となるとは限らないので ARMA は定常になるとは限らない.

ARMA 過程の性質

定常 ARMA(p,q) 過程は以下の性質を持つ.

1. $\mu = E(y_t) = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots\phi_p}$.
2. q+1 次以降の自己共分散と自己相関は以下の p 次差分方程式（ユールウォーカー方程式）

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}, \quad k \geq q+1 \\ \rho_k &= \phi_1\rho_{k-1} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k \geq 1+1 \end{aligned}$$

$\because$ q 次までは MA 項の影響があるので，一般的に表現するのが難しい.

3. ARMA 過程の自己相関は指数的に減衰する.