M-推定量の漸近正規性の" 古典的な条件" を述べる．これらの条件は 1930 年代から 40 年代にかけて，それまで曖昧であった最尤推定量の漸近正規性を数学的に厳密なものとするためフィッシャーなどにより定式化されたものである．

Theorem 5.23 では 1 階微分までしか必要なかったのに対し，"古典的な条件"では 3 階微分の存在を要求する．このように"古典的な条件"はより厳しい条件であるのだが，定理自体シンプルであり，証明もまたシンプル，それでいて多くの例に適用可能であるという点で面白い．さらに，古典的条件では Z-推定量の存在を保証し，その一致性についてはほとんど言うことがない．

一般の Z-推定量とベクトル値のパラメータに対して古典的なアプローチを述べる．まず，$X_1, ..., X_n$ は分布 P からのサンプルとする．

$$\Psi_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(X_i) = \mathbb{P}_n\psi_\theta, \quad \Psi(\theta) = P\psi_\theta.$$

推定量 $\hat{\theta}_n$ を $\Psi_n(\theta) = 0$ を解いて求める．真のパラメータ θ_0 は $\Psi(\theta) = 0$ の解である．

定理の最も重要な条件はある可積分関数 $\ddot{\psi}$ が存在して，任意の x で $\psi_\theta(x)$ の θ による 2 階偏微分が

$$\left|\frac{\partial^2 \psi_{\theta,h}(x)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right| \le \ddot{\psi}(x)$$

を満たすことである．これが少なくとも θ_0 の近傍の任意の θ で成り立つことである．

Theorem 5.41. ユークリッド空間の開部分集合 Θ を考える．各 $\theta \in \Theta$ に対して，$\theta \mapsto \psi_\theta(x)$ は二階連続微分可能であるとする ($\forall x$)．まず，$P\psi_{\theta_0} = 0$ であり，$P||\psi_{\theta_0}||^2 < \infty$，さらに行列 $P\dot{\psi}_{\theta_0}$ が存在して，非特異とする．また，$\psi_\theta(x)$ の θ_0 の近傍の任意の θ での二階偏微分はある固定された可積分関数 $\ddot{\psi}(x)$ で抑えられるとする．

このとき，$\Psi_n(\hat{\theta}_n) = 0$ を満たすような一致推定量の列 θ_n は任意の n で

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = -(P\dot{\psi}_{\theta_0})^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\psi_{\theta_0}(X_i) + o_P(1)$$

を満たす．特に，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightsquigarrow N(0, (P\dot{\psi}_{\theta_0})^{-1}P\psi_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^T(P\dot{\psi}_{\theta_0})^{-1}).$$

Proof. テイラーの定理より，ある $\theta_0, \hat{\theta}_n$ の内分点 $\tilde{\theta}_n$ が存在して，

$$0 = \Psi_n(\hat{\theta}_n) = \Psi_n(\theta_0) + \dot{\Psi}_n(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0) + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^T\ddot{\Psi}_n(\tilde{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta_0).$$

と書ける．ここで最右辺 1 項目，$\Psi_n(\theta_0)$ は i.i.d. 確率ベクトル $\psi_{\theta_0}(X_i)$ の平均である．ただし，$P\psi_{\theta_0} = 0$ である．中心極限定理より，$\sqrt{n}\Psi_n(\theta_0)$ は平均 0，分散 $P\psi_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^T$ の多変量正規分布に収束する． すなわち

$$\sqrt{n}\Psi_n(\theta_0) \rightsquigarrow N(0, P\psi_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^T).$$

次に最右辺 2 項目の $\dot{\Psi}_n(\theta_0)$ もまた， i.i.d. 確率ベクトル $\dot{\psi}_{\theta_0}(X_i)$ の平均，すなわち，

$$\dot{\Psi}_n(\theta_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\psi}_{\theta_0}(X_i).$$

よって，大数の法則より，

$$\dot{\Psi}_n(\theta_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\psi}_{\theta_0}(X_i) \xrightarrow{\mathrm{P}} P\dot{\psi}_{\theta_0} =: V.$$

さらに最右辺 3 項目に現れる $\ddot{\Psi}_n(\tilde{\theta}_n)$ は $\ddot{\psi}$ の二階偏微分の結果の $k \times k$ 行列の k 次元ベクトルである．仮定より，ある θ_0 回りのボール B が存在して，任意の $\theta \in B$ で $\ddot{\psi}_\theta$ が $||\ddot{\psi}||$ によって抑えられる．事象 $\{\hat{\theta}_n \in B\}$ は確率的に 1，すなわち

$$P(\hat{\theta}_n \in B) \to 1$$

である．この事象において

$$||\ddot{\Psi}_n(\tilde{\theta}_n)|| = ||\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ddot{\psi}_{\tilde{\theta}_n}(X_i)|| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n ||\ddot{\psi}(X_i)||.$$

よって，大数の法則より，$\ddot{\Psi}_n(\tilde{\theta}_n)$ は確率有界．以上により，

$$\begin{aligned}
-\Psi_n(\theta_0) &= \dot{\Psi}_n(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0) + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^T \ddot{\Psi}_n(\tilde{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta_0) \\
&= (V + o_P(1) + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)O_P(1))(\hat{\theta}_n - \theta_0) \\
&= (V + o_P(1))(\hat{\theta}_n - \theta_0).
\end{aligned}$$

$V = P\dot{\psi}_{\theta_0}$ は非特異という仮定より，行列 $V + o_P(1)$ は確率的に 1 で逆可能である．よって両辺に $\sqrt{n}$ を掛けて，$(V + o_P(1))^{-1}$ を左から掛けることにより

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightsquigarrow N(0, (P\dot{\psi}_{\theta_0})^{-1} P\psi_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^T (P\dot{\psi}_{\theta_0})^{-1}).$$

が得られた． □

$\hat{\theta}_n$ の存在と一致性を仮定していたが，これは弱められる．

Theorem 5.42. 先の定理の条件のもとで，$\mathbb{P}_n\psi_\theta = 0$ は確率的に一つの根を持つ．そして，根の列 $\hat{\theta}_n$ は θ_0 に確率収束する．もし，$\psi_\theta = \dot{m}_\theta$ がある関数 m_θ の勾配で，θ_0 が $\theta \mapsto Pm_\theta$ の極大点なら，$\hat{\theta}_n$ は $\theta \mapsto \mathbb{P}m_\theta$ の極大点から選ばれる．

Proof. x を固定して，$\theta \mapsto \psi_\theta$ をテイラー展開すると，ある θ_0 と θ の内分点 $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x)$ が存在して，

$$\psi_\theta = \psi_{\theta_0} + \dot{\psi}_{\theta_0}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T \ddot{\psi}_{\tilde{\theta}}(\theta - \theta_0).$$

x について期待値をとると，

$$P\psi_\theta = P\psi_{\theta_0} + P\dot{\psi}_{\theta_0}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T P\ddot{\psi}_{\tilde{\theta}}(\theta - \theta_0).$$

仮定より，θ を θ_0 の十分近くにとれば，

$$||P\ddot{\psi}_{\tilde{\theta}}|| \leq P||\ddot{\psi}|| < \infty.$$

よって，

$$P\psi_\theta = P\psi_{\theta_0} + P\dot{\psi}_{\theta_0}(\theta - \theta_0) + o(||\theta - \theta_0||)$$

より，$\Psi(\theta) = P\psi_\theta$ は θ_0 で微分可能である．θ を動かすことで，Ψ は θ_0 の近傍で微分可能である．$\dot{\psi}_\theta$ を θ_0 回りでテイラー展開することにより $P\dot{\psi}_\theta$ は θ_0 の近傍で連続であることも分かる．

仮定より $P\dot{\psi}_{\theta_0}$ は非特異なので，必要であれば，近傍を小さくとり，Ψ の微分が近傍全体で非特異となるようにできる．

逆関数定理より，任意の十分小さな $\delta > 0$ に対し，θ_0 の開近傍 G_δ が存在して，写像 $\Psi : \overline{G_\delta} \mapsto \overline{\mathrm{ball}}(0, \delta)$ を同型写像（つまり 1 対 1 の線形写像）となるようにとれる．

平均値の定理及び，$||(P\dot{\psi})^{-1}||$ が有界なことから，$\bar{G}_\delta$ の直径は δ の定数倍でおさえられる．

$\Psi_n(\theta) = \mathbb{P}_n\psi_\theta$ に対して同様にテイラー展開を行い差をとることにより

$$\sup_{\theta\in\bar{G}_\delta} ||\Psi_n(\theta) - \Psi(\theta)|| \le o_P(1) + \delta o_P(1) + \delta^2 O_P(1).$$

ここで，任意の $\delta > 0$ に対して，$P(o_P(1) + \delta o_P(1) > \frac{1}{2}\delta) \to 0$ より，$P(o_P(1) + \delta_n o_P(1) > \frac{1}{2}\delta_n) \to 0$ なる列 $\delta_n \downarrow 0$ が存在する．また，

$$K_{n,\delta} = \left\{ \sup_{\theta\in\bar{G}_\delta} ||\Psi_n(\theta) - \Psi(\theta)|| \le \delta \right\}$$

と定義すると，$P(K_{n,\delta_n}) \to 1$ である．

事象 $K_{n,\delta}$ において，写像 $\theta \mapsto \theta - \Psi_n \circ \Psi^{-1}(\theta)$ は $\overline{\mathrm{ball}}(0,\delta)$ を自分自身に写す．これは $\bar{G}_\delta$ と $K_{n,\delta}$ の定義より，任意の $\theta \in \overline{\mathrm{ball}}(0,\delta)$ について，

$$\begin{aligned} ||(\theta - \Psi_n \circ \Psi^{-1}(\theta)) - 0|| &= ||\theta - \Psi_n \circ \Psi^{-1}(\theta)|| \\ &= ||\Psi \circ \Psi^{-1}(\theta) - \Psi_n \circ \Psi^{-1}(\theta)|| \\ &= ||(\Psi - \Psi_n) \circ \Psi^{-1}(\theta)|| \\ &\le \sup_{\theta\in\bar{G}_\delta} ||\Psi_n(\theta) - \Psi(\theta)|| \le \delta \end{aligned}$$

となることから分かる．この写像は連続なので，$\overline{\mathrm{ball}}(0,\delta)$ 内に不動点をもつ（不動点定理：コンパクト凸集合からそれ自身への任意の連続写像 f に対して，$f(x_0) = x_0$ 満たす点 x_0，すなわち不動点が存在する）．これは $\bar{G}_\delta$ における Ψ_n が 0 となる点が存在することを主張している．以上により定理の初めの主張，$\mathbb{P}_n\psi_\theta = 0$ は確率的に 1 つの根をもつことが示された．

後半の主張に関しては，まず，θ_0 が $\theta \mapsto Pm_\theta$ の極大点であるという仮定から，$\theta \mapsto Pm_\theta$ の θ_0 におけるヘシアン $P\dot{\psi}_{\theta_0}$ が負定値であることがわかる．Theorem 5.41 より任意の $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_0$ となる数列に対して，

$$\mathbb{P}_n\dot{\psi}_{\hat{\theta}_n} - \mathbb{P}_n\dot{\psi}_{\hat{\theta}_0} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

それゆえ，ヘシアン $\mathbb{P}_n\dot{\psi}_{\hat{\theta}_n}$ は負定値行列 $P\dot{\psi}_{\theta_0}$ に確率収束して，確率的に負定値行列である．つまり $\hat{\theta}_n$ は $\theta \mapsto \mathbb{P}m_\theta$ の極大点である． $\square$

結果の解釈及び例は次回．